

Intégrabilité

Le formalisme d'Hamilton-Jacobi est basé partiellement sur l'existence de constantes d'intégration, auxquelles on identifie ensuite les nouvelles variables P_i résultant de la transformation canonique associée à la solution.

Ces P_i sont donc des intégrales du mouvement.

Lorsque un système possède suffisamment d'intégrales du mouvement, on dit qu'il est *intégrable* :

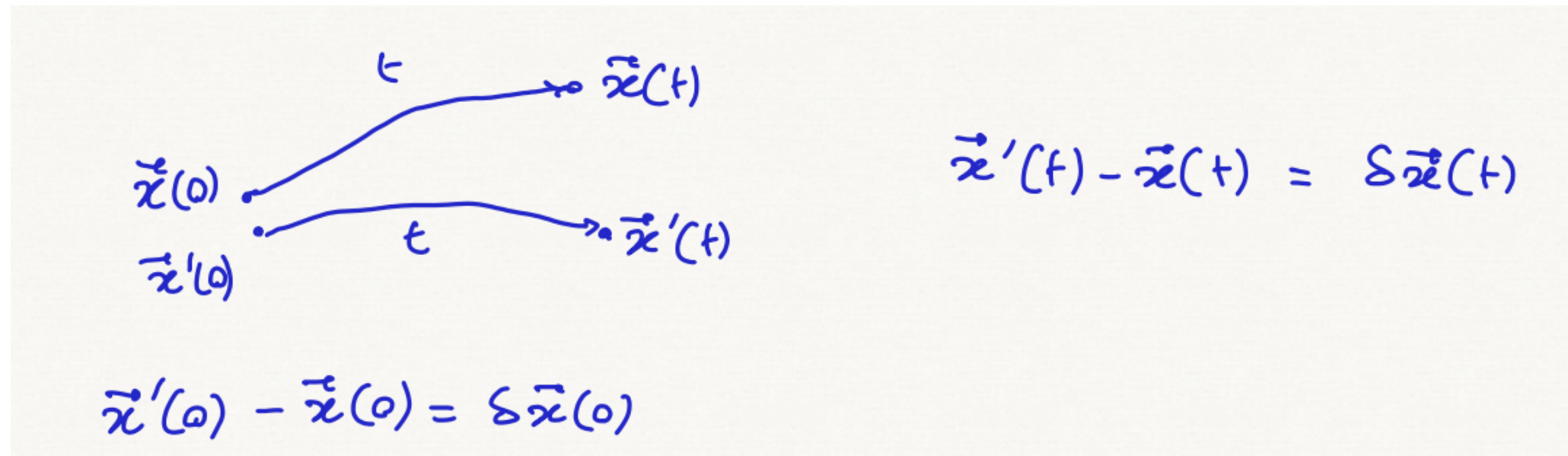
Déf.: Un système Hamiltonian à n degré de liberté est dit intégrable s'il possède n constantes du mouvement en involution, c'est-à-dire

$$\exists G_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1) \quad \frac{\partial G_i}{\partial t} + \{G_i, H\} = 0$$

$$(2) \quad \{G_i, G_j\} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Intégrabilité et prédictibilité

Différence majeure entre systèmes intégrables et non-intégrables :
“Comment est-ce qu’une incertitude initiale évolue dans le temps ?”



Réponse :

- pas d'augmentation ou augmentation algébrique pour un système intégrable.
- augmentation potentiellement exponentielle pour un système non-intégrable.

L'espace de phase

Symétrie formelle $p \leftrightarrow q$ en mécanique Hamiltonienne
-> On considère l'espace de phase (p,q)

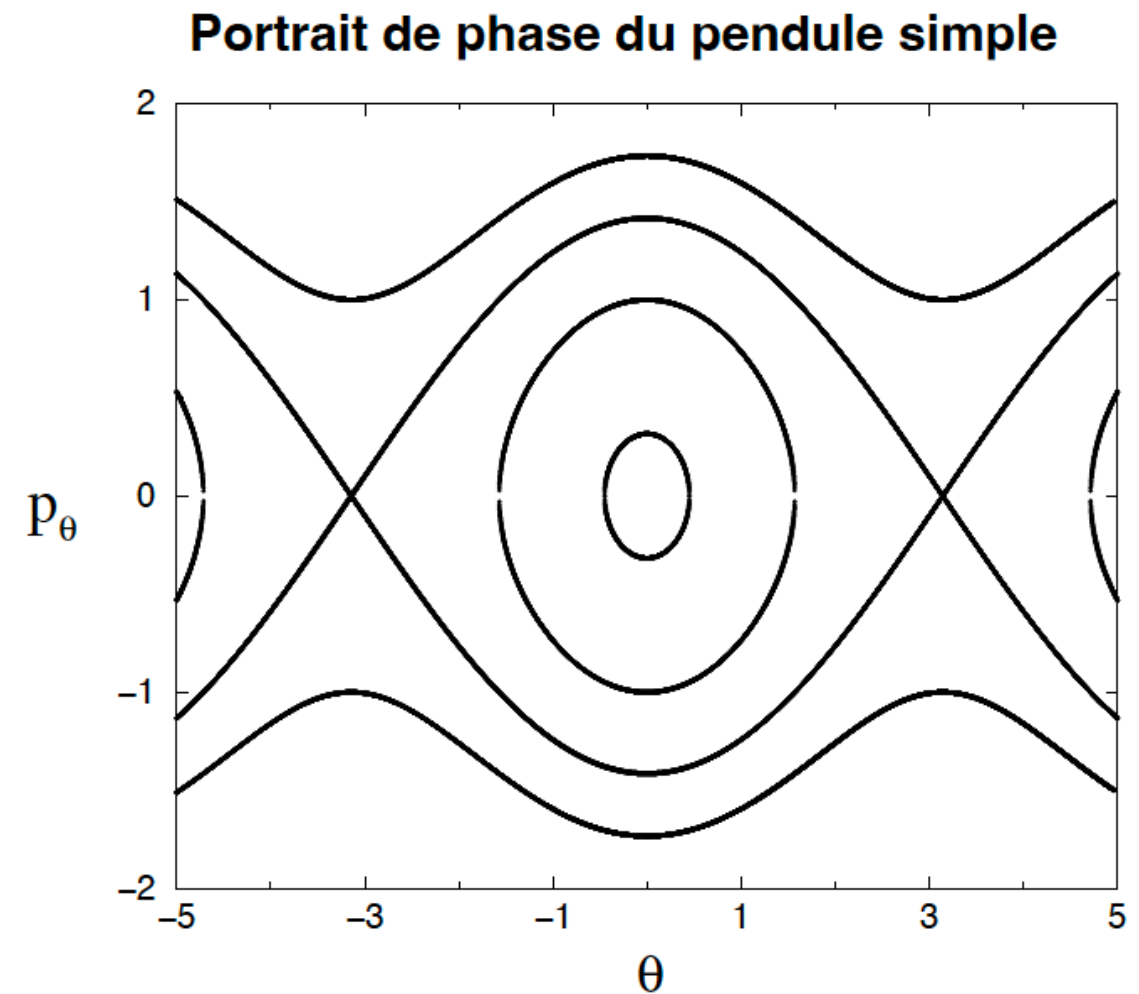
Exemple: le pendule simple

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - mgr \cos \theta$$

H ne dépend pas explicitement de t

$$H(\theta, p_\theta) = E$$

$$p_\theta = \pm \sqrt{2mr^2(E + mgr \cos \theta)}$$



Variables angle-action

Système intégrable avec orbites périodiques

Transformation canonique -> une variable compacte = angle

$$\Delta Q \equiv \oint \frac{dQ}{dq} dq = 2\pi \quad = \text{Intégrale sur une période}$$

Transformation canonique

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dQ}{dq} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial F_2}{\partial P} \right) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P^2} \frac{\partial P}{\partial q}$$

=0

**P=const. le long
d'une trajectoires**

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq$$

Donne la relation entre alpha et P

$$\beta^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq$$

Dont on déduit la période / fréquence
de l'orbite

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = \frac{d\beta}{dI}$$

$$I=P$$

Le modèle de Lorenz - attracteurs étranges

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma [y(t) - x(t)] \\ \frac{dy}{dt} = \rho x(t) - y(t) - x(t) z(t) \\ \frac{dz}{dt} = x(t) y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

